MOŽNOSTI ROZVOJE GEOMETRICKÝCH POJMŮ U MATEMATICKY NADANÝCH ŽÁKŮ NA 1. STUPNI ZŠ

Irena Budínová

Katedra matematiky Pedagogická fakulta Masarykovy Univerzity, Brno

Abstrakt:

Nadaní žáci potřebují v geometrii více, než se uvádí v kurikulárním dokumentu Rámcový vzdělávací program (RVP). Potřebují rozvíjet schopnost geometrického uvažování, potřebují podnětné činnosti, které jim umožní pracovat s prostorovými objekty a řešit různé otevřené problémy. Rozvoj geometrického myšlení je dlouhodobá záležitost a vyžaduje neformální setkávání žáků s geometrickými pojmy a jejich vlastnostmi. Velmi důležité jsou přitom první roky školní docházky a také léta předškolní, kdy dochází k rozvoji intuitivního vnímání okolního světa. V příspěvku ukážeme na několika případových studiích, jaké jsou možnosti rozvoje geometrického myšlení nadaných žáků prvního stupně a mateřské školy prostřednictvím úloh, které jsou pro ně dostatečně stimulující.

Abstract:

Talented pupils need in geometry more than the Frame educational program requires. They need to develop geometric thinking, they need stimulating activities that enable them to work with spatial objects and to solve several open-ended problems. Developing geometrical thinking is a long-term path and requires an informal encounter of pupils with geometrical concepts and their properties. The first years of education are very essential because intuitive perceiving of the world is developed. In this study, we show possibilities of developing geometric thinking of talented pupils by tasks which are stimulating enough for them.

Úvod

Geometrie by měla hrát významnou úlohu v matematice na prvním stupni základní školy a neměla by být limitována na pojmenovávání základních rovinných útvarů, rýsování úseček, trojúhelníků, rovnoběžníků a kružnic a měření úhlů. Podle Rámcového vzdělávacího programu (2007) jsou očekávané výstupy pro 1. období (RVP, 2007, s. 31): *„Žák rozezná, pojmenuje, vymodeluje, a popíše základní rovinné útvary a jednoduchá* *tělesa; nachází v realitě jejich reprezentaci. Porovnává velikost útvarů, měří a odhaduje délku úsečky. Rozezná a modeluje jednoduché souměrné útvary v rovině."*

Geometrie má v životě dospělého člověka mnoho praktických aplikací. Řada každodenních aktivit vyžaduje prostorovou představivost, ať už se jedná o orientaci v neznámém městě podle mapy, aranžování nábytku, nebo balení zavazadla. Každý z nás využívá geometrické vztahy k měření vzdáleností a určování obsahů a objemů geometrických útvarů. Geometrie a vizuální myšlení je důležité v umění, architektuře, dizajnu, grafice, animaci, atd. Geometrické myšlení lze jistě rozvíjet, vede k němu dlouhá cesta, na jejímž začátku stojí žákovské objevování základních vztahů a pojmů.

Jedním z prvních témat, kterým se zabývají dětí v raném školním a předškolním vzdělávání, jsou geometrické útvary. Ještě před zahájením školní docházky děti získávají základní informace o geometrických útvarech z jejich okolí. Některé z těchto raných informací mohou být mylné a mohou negativně ovlivnit budoucí pochopení geometrického útvaru dítětem. Z tohoto důvodu je podstatné zkoumání způsobů rozeznávání a klasifikace geometrických útvarů dětí a kritérií, která v raném dětství používají. Za jednu ze základních teorií o rozvoji geometrického myšlení, která se zabývá dětskou klasifikací geometrických útvarů, je považována van Hieleho teorie, která však není dostačující např. pro děti předškolního věku.

V průběhu předškolního vzdělávání mohou děti v průběhu manipulace s geometrickými objekty nebo během hry získávat intuitivní poznatky o geometrických objektech. Absence intuitivních poznatků je patrná v okamžiku, kdy se stupňuje požadavek na abstrakci. V případě nadaných žáků je navíc vhodné volit v geometrii úlohy, které pomáhají rozvíjet žákovskou kreativitu. Mann (2006) upozorňuje, že výuka geometrie na prvním stupni, která je nedostatečná nebo omezená na soubor dovedností, které má žák zvládnout a zapamatovat si, vede mnoho dětí ke ztrátě entuziasmu pro geometrii, která se projeví nezájmem o geometrické učivo v pozdějších letech. Je velmi důležité, aby učitel rozvíjel matematickou (a geometrickou) kreativitu již od začátku žákovy cesty vzděláním.

V příspěvku je uvedeno několik případových studií nadaných žáků prvního stupně, kteří řešili geometrické úlohy zaměřené na sledování pojmotvorného procesu. Dále jsou uvedeny aktivity předškolních dětí.

Prostorová představivost

Jedním z cílů výuky školní geometrie je rozvoj prostorové představivosti. **Prostorovou představivost** lze chápat jako *„schopnost vnímat objekty ve vzájemném vztahu a schopnost jedince mentálně měnit orientaci objektů ve vztahu s ostatními objekty nebo s ním samotným"* (Tipps, Johnson, & Kennedy, 2011, s. 419). Šarounová rozumí prostorovou představivostí *„soubor dílčích schopností, týkajících se našich představ o prostoru, o tvarech a vzájemných vztazích mezi předměty, o vztazích mezi předměty a námi, a konečně také o prostorových vztazích jednotlivých částí našeho těla navzájem“* (1982, citováno z Molnár, Perný, & Stopenová, 2006, s. 6). Jirotková geometrickou představivost specifikuje jako schopnost – dovednost (1990, citováno z Molnár, Perný, & Stopenová, 2006, s. 6):

a) *„poznávat geometrické útvary a jejich vlastnosti,*
b) *abstrahovat z konkrétních objektů jejich geometrické vlastnosti a vidět v nich geometrické útvary v čisté podobě,*
c) *na základě rovinných obrazů si představit geometrické útvary v nejrůznějších vzájemných vztazích, a to i v takových, v nichž nemohou být převedeny pomocí hmotných modelů geometrických útvarů,*
d) *mít zásobu geometrických útvarů a schopnost vybavovat si jejich nejrůznější podoby,*
e) *představit si geometrické útvary a vztahy mezi nimi na základě jejich popisu.“*

Prostorová představivost pomáhá dětem porozumět vztahům mezi objekty a jejich umístění v třídimenzionálním světě. Aby byla rozvíjena prostorová představivost, musí mít děti mnoho zkušeností a také dovedností, které jsou zaměřené na geometrické vztahy.

Výuka zaměřená na geometrické útvary v raném dětství je mnohem důležitější, než si většina lidí uvědomuje. V souvislosti s rozeznáváním geometrických útvarů jsou uváděny dva tradiční přístupy: **Piagetův přístup** o rozvoji geometrického myšlení v dětství a **van Hieleho přístup**. Piaget ukazuje, že rozvoj geometrického myšlení v dětství probíhá ve dvou fázích. Tento přístup vysvětluje rozeznávání prostředí a útvarů v dětství pomocí topologie. Podle Piageta jsou děti v první fázi schopny poznat známé útvary, toto rozpoznání zahrnuje euklidovské útvary. Podle Piageta si děti v této fázi osvojují topologické znalosti, jako zda jsou útvary otevřené nebo zavřené, což poznají prostřednictvím senzomotorických aktivit, a umí rozlišit útvary podle topologických vlastností. Podle Piageta (Piaget & Inhelder, 1967) dokáží děti v druhé fázi rozlišit euklidovské útvary jako kruh, čtverec, trojúhelník, obdélník, a dokáží je od sebe odlišit.

Na druhé straně van Hiele (1986) tvrdí, že rozvoj geometrického myšlení neprobíhá ve dvou fázích, jako podle Piageta, ale v pěti oddělených úrovních. Tyto úrovně jsou následující (Tipps, Jahnson, & Kennedy, 2011, Žilková, 2013):

- **Úroveň 0:** Vizualizace – rozpoznávání a pojmenovávání obrazců.
- **Úroveň 1:** Analýza – popisování vlastností obrazce.
- **Úroveň 2:** Neformální dedukce – klasifikace a třídění obrazců podle vlastností.

- **Úroveň 3:** Dedukce – provádění důkazů za použití vět a definic.
- **Úroveň 4:** Tvrdá matematika – práce v různých geometrických systémech.

První tři úrovně (nultá až druhá) se objevují v průběhu základní školy, třetí a čtvrtá obvykle přichází až později. Nás nyní zajímají první dvě úrovně – vizualizace a analýza. Vizualizace začíná v raném dětství a pokračuje na prvním stupni základní školy. Děti poznávají a označují běžné rovinné obrazce jako kruh, čtverec, trojúhelník a obdélník. Poznávají jednoduchá tělesa jako krychle, koule, válec, jehlan, kužel a označují je formálními nebo méně formálními jmény jako krabice nebo balón (podle objektů z okolí, které geometrický útvar připomínají). Analýza by měla navazovat v pozdějších ročnících prvního stupně a měla by vycházet z opakovaného manipulování dítěte s danými objekty, kdy dítě začíná intuitivně chápat vlastnosti daného objektu.

Van Hieleho kroky jsou, obdobně jako Piagetovy, také postupné a úspěch na určité úrovni závisí na vlastnostech geometrického myšlení v předchozí úrovni (Aktas Arnas, & Altun, 2010). Nicméně podle van Hieleho (1986) je Piagetova teorie geometrického myšlení vývojová teorie a ne vzdělávací teorie. Piaget se nezajímal o to, jak mohou být děti podporovány v posunu od jedné úrovně k druhé. Navíc van Hiele upozorňuje na to, že potřebujeme více než dvě úrovně k vysvětlení rozvoje geometrického myšlení.

Pro van Hieleho (1986) je první úroveň geometrického myšlení úroveň vizuální. Na této úrovni vnímají děti útvary v celku a klasifikují je porovnáváním s **prototypem**. Tato úroveň zahrnuje první dva roky primárního vzdělávání. Děti na této úrovni nevěnují pozornost definování vlastností útvarů, jako jsou strany nebo vrcholy. Podle van Hieleho teorie, když dítě začne definovat geometrické útvary podle jejich vlastností, jako je počet stran nebo vrcholů, nachází se na druhé úrovni geometrického myšlení, což je analýza (Hannibal & Clements, 2000). Děti dosahují této úrovně v 3. až 4. ročníku primárního vzdělávání (Aktas Arnas, & Altun, 2010).

Van Hieleho teorie je kritizována zejména proto, že se nezabývá vývojem geometrického myšlení v předškolním věku.

Dindyal (2015) uvádí termín **prostorové uvažování**. Dindyal udává, že není zpochybňován fakt, že prostorové uvažování je důležité pro malé děti, nicméně je důležité dodat, co jsou schopny malé děti v geometrii dělat a co od nich žádáme dělat. Moss et al. (2015, citováno z Dindyal, 2015) míní, že ke geometrii bychom měli přistupovat jinak, než jako k předmětu zaměřenému na označování a klasifikaci útvarů, a že geometrie by měla být dětem v raném věku představována dynamicky, prostorově a imaginativně.

Jeden z důvodů, proč chceme učit geometrii děti raného věku, je rozvíjet geometrické myšlení dětí, které může být chápáno jako forma matematického myšlení uvnitř obsahové oblasti geometrie (Dindyal, 2015). Geometrické myšlení je neoddělitelné od určitých typů dovedností, které chceme, aby malé děti ovládaly. Např. Hoffer (1981, citováno z Dindyal, 2015) tvrdil, že když studujeme geometrii, snažíme se u žáka rozvíjet pět typů dovedností: **vizuální dovednosti** (poznávání, pozorování vlastností, interpretaci map, znázorňování), **verbální dovednosti** (správné používání terminologie a přesná komunikace při popisování prostorových pojmů a vztahů), **dovednosti zakreslování** (komunikace prostřednictvím rýsování, schopnost reprezentovat útvar v 2D nebo 3D, vytváření diagramů, načrtávání symetrických obrázků), **logické dovednosti** (klasifikace, rozeznání důležitých vlastností jako kritérií, rozlišení tvarů, formulování a testování hypotéz, vytváření deduktivních závěrů, používání protipříkladů), a **schopnosti aplikace** (aplikace v běžném životě, využívající naučené geometrické výsledky). Přestože se tyto dovednosti jeví jako vhodné a potřebné až na druhém stupni ZŠ, musí si je žáci začít osvojovat v raných stádiích školní docházky, aby nedocházelo k opoždění rozvoje těchto dovedností.

Duval (1999) uvádí, že v geometrii používáme jazyk, symboly nebo obrázky, které postupně kategorizoval jako **registr přirozeného jazyka**, **registr symbolického jazyka** a **obrazový registr**.

Geometrický obrázek není nic jiného než reprezentace nějakého abstraktního pojmu, jako je např. trojúhelník. Malé děti mají problémy propojit různé reprezentace stejného geometrického pojmu. Co je horší, děti se někdy upínají k nějaké prototypické reprezentaci. Děti užívají prototypy ke kategorizaci útvarů (Hershkowitz, 1989, citováno z Dindyal, 2015). To může být, přinejmenším částečně, kvůli geometrickým zkušenostem, které děti mají ve svých hodinách matematiky, nebo které viděly ve standardních učebnicích.

Tsamir et al. (2015, citováno z Dindyal, 2015) poukazuje, že nejdříve jsou osvojeny **ideální příklady** (prototypy), a velice často je to nějaký netypický rys (např. velikost nebo orientace), který přispívá k vytvoření prototypického příkladu. Děti mohou mít různé představy pro tentýž pojem. Malým dětem může použití několika pozitivních a negativních příkladů pomoci získat pevnější pochopení geometrického pojmu.

Giaquinto (2007) se na utváření geometrických pojmů dívá z pohledu vnímání různých objektů jedincem. Naše počáteční geometrické pojmy základních útvarů závisí podle něj na tom, jak vnímáme dané útvary. V rámci geometrického pojmu máme určité základní dispozice pro vytváření představ. Tyto dispozice mohou být spuštěny zkušenostmi s tím, co vidíme nebo co si představujeme, a když to děláme, vytváříme si **geometrickou představu**. Představy utvářené touto cestou konstituují znalost, totiž syntetickou *a priori* znalost, za předpokladu, že dispozice k vytváření představ jsou spolehlivé.

Giaquinto (2007) upozorňuje, že vnímání objektu nebo obrázku může být zásadně ovlivněno jeho orientací. Velmi známý příklad, který byl poprvé diskutován Ernstem

Machem, je případ čtverce – kosočtverce. Čtverec s horizontálně umístěnou stranou je vnímán jako čtverec, ale čtverec stojící vertikálně na vrcholu není vnímán jako čtverec, nýbrž jako kosočtverec.

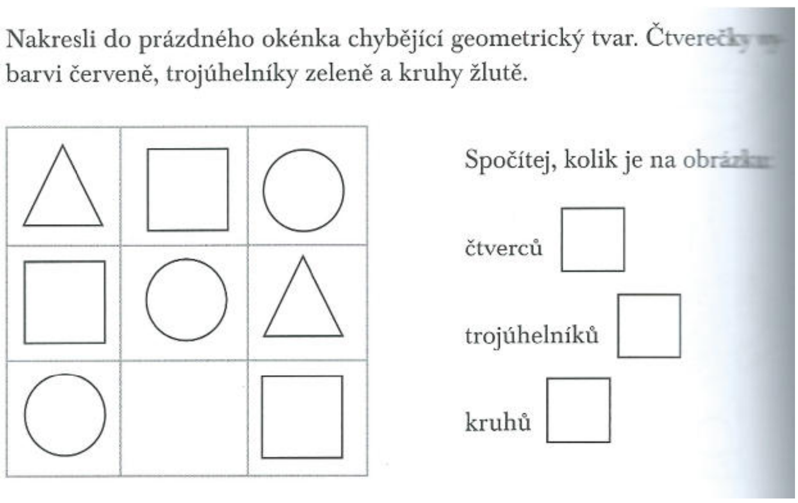
Dále Giaquinto (2007) rozlišuje mezi **percepčním pojmem** a samotným **pojmem**. Schopnost usuzovat např. o čtvercích je odlišná od schopnosti rozpoznat percepčně „něco jako čtverec“. Schopnost usuzovat o čtvercích a následně vše zdůvodňovat, vyžaduje, aby jedinec měl vytvořen pojem čtverce. Pojem nějakého objektu nemůže být zaměňován s percepční kategorií specifikace tohoto objektu. Ale pojmy pro viditelné vlastnosti, alespoň v některých případech, jsou těsně spjaty s příslušnou percepční kategorií specifikace. Než se vytvoří geometrický pojem čtverce, vytvoří se nejdříve percepční pojem čtverce.

Můžeme shrnout, že si žáci pozorováním určitých zákonitostí kolem sebe vytvářejí představu pojmu. Podle své zkušenosti a pozorování vyslovují tvrzení pro různé jevy a jejich podstatu. V reálné výuce může jít učitel v podstatě dvěma směry. Ve škole dodnes převládá výuka v duchu „učit se od odborníka“: učitel ukazuje metodu s několika příklady, které žáci potom aplikují na analogických problémech (Pehkonen, 1997). Tento způsob výuky je dlouhodobě kritizován jako neúčinný, vedoucí k formálním poznatkům a nevhodný zejména pro matematicky nadané žáky. Matematicky nadaným žákům nevyhovuje rutina, která je nevyhnutelná, pokud žáci procvičují učitelem předanou metodu. V protipólu řešení rutinních problémů může stát řešení kreativních problémů, založené na heuristických strategiích. I zde je riziko, že metoda řešení problémů dá žákovi novou množinu pravidel, čímž se vracíme k řešení rutinních problémů (Pehkonen, 1997).

Také Mann (2006) míní, že je obtížné vytvářet matematickou kreativitu, když je jedinec omezován na rutinní aplikace bez poznání důležitosti řešení problémů. Pro nadané žáky je tudíž vhodnější výuka využívající otevřené problémy (Mann, 2006).

Pehkonen (2003) na druhou stranu upozorňuje také na riziko při výuce směřující od žákovských představ k objektivním (formálním) znalostem, která se právě v geometrii nabízejí. **Objektivní znalost** (formální znalost, oficiální znalost, veřejná znalost) v matematice *„je součástí všeobecně akceptované struktury matematiky, která je složkou matematické práce již více než 2000 let“* (Pehkonen, 2003, s. 3). Matematika je čistá věda v tom smyslu, že představa jedince se může stát objektivním pojmem tehdy, když je logicky zdůvodněna, všeobecně akceptována a když všechny ostatní poznatky o dané problematice korespondují s touto představou. Naproti tomu **subjektivní znalost** (neformální znalost, osobní znalost, soukromá znalost) *„je něco jedinečného, co je vlastněno pouze jediným člověkem, protože to je založeno na osobní zkušenosti a porozumění.“* (Pehkonen, 2003, s. 3). Sem spadají přesvědčení (beliefs) a představy daného pojmu (conceptions of a certain concept).

Žák si tedy vytvoří představu na základě svého pozorování, která zastupuje příští objektivní znalost. Rozdíl mezi představou a objektivní znalostí je komplikovaný kvůli faktu, že představa určitého konceptu může vypadat jako „obraz“ konceptu. Jelikož obraz a jeho pojem nejsou totéž, a obvykle obraz ukazuje jen jeden pohled na objekt, obdobně představa pojmu reprezentuje pouze částečně svůj objekt. Můžeme tedy říci, že pojem vznikající na základě zkušenosti se nemusí utvářet zcela správně vzhledem k objektivnímu pojetí pojmu. V tomto pohledu je směr *objektivní znalost ⇨ žákovská představa ⇨ objektivní znalost* více bezpečný. Příkladem může být vývoj pojmu trojúhelník. Existují různé objektivní definice pojmu trojúhelník, např.: *Mějme tři nekolineární body A, B, C v rovině. Trojúhelník je průnik polorovin* $\mapsto ABC$, $\mapsto ACB$ *a* $\mapsto BCA$. Jiná možná definice: *Mějme tři nekolineární body A, B, C v rovině. Trojúhelník je lomená čára ABCA sjednocená se svou vnitřní oblastí.* Můžeme uvádět další definice, více či méně náročné na abstrakci žáka. První zde uvedená definice je pro žáky nejvíce snadná na tvorbu představy, neboť je možné žákům znázornit vznik trojúhelníku pomocí tří různě barevných fólií, které se překrývají. Přesto i tuto definici je možno předložit až žákům 7. nebo 8. ročníku, kdy je jejich schopnost abstrakce natolik vysoká, aby pochopili, co slova v definici říkají. To se nemusí týkat všech žáků, ale pro nadané žáky by to mělo platit. Žáci se však s různými reprezentacemi trojúhelníku setkávají již od předškolního věku. Obvykle pracují s obrázkem trojúhelníku, a to téměř výlučně trojúhelníku rovnoramenného (či rovnostranného), postaveného na základnu. Většinou mají žáci za úkol trojúhelník vybarvit určitou barvou, nebo trojúhelníky spočítat, jak je vidět na obrázku 1, který ilustruje úkol pro předškolní děti.



Obrázek 1. Běžný úkol pro předškolní děti. Převzato z: Zábavná cvičebnice pro předškoláky. Svojtka & Co. 2010

Tím, že žák vybarví uvedené trojúhelníky zeleně a do prázdného okénka dokreslí další trojúhelník, dává najevo, že zná termín „trojúhelník“ a že pochopil pojem trojúhelníku. Ve skutečnosti ale prezentuje svoji představu pojmu, kterou získal opakovanou zkušeností s obrázky rovnoramenných trojúhelníků. Zřejmě se od dítěte očekává, že nakreslí stejný rovnoramenný trojúhelník. Byl by za správný považován obrázek tupoúhlého trojúhelníku postaveného na vrchol? Ve světě mateřských škol asi stěží. Dále máme na obrázku předkreslenou pouze hranici trojúhelníku, výplň dokreslí teprve žák, přesto je útvar označen za trojúhelník (nikoli třeba hranici trojúhelníku, což by bylo pro malé děti velmi matoucí). Utvořenou představu o trojúhelníku dítě bude mít tak dlouho, dokud se nesetká se širší množinou modelů trojúhelníku. Jak zmiňuje Pehkonen (2003), představy a přesvědčení mají tendenci se měnit v závislosti na nových zkušenostech.

Kognitivní proces v geometrii

Koncepce žákovského poznávacího procesu Hejného a Kuřiny (2001) vychází z předpokladu, že *„v poznávacím procesu žáci obvykle nejprve porozumí několika konkrétním příkladům, všímají si společných vlastností, později zobecňují a nakonec přichází abstrakce."* (Hejný, & Kuřina, 2001, s. 128) Tento poznávací proces se týká pojmotvorného procesu u abstrakt, k němuž dochází pomocí jiného procesu zaměřeného na pochopení konkrét, u nichž není zapotřebí taková míra zobecnění. Proces má následující vývoj:

Motivace ⇨ izolované modely ⇨ generické modely ⇨ abstraktní znalosti ⇨ krystalizace

Během poznávacího procesu nastávají dva **mentální zdvihy**: první vede od izolovaných modelů ke generickým modelům a je nazýván **zdvih zobecnění**, druhý vede od generických modelů k abstrakci a nazývá se **abstrakční zdvih**. Během zdvihu zobecnění se dosud oddělené poznatky spojují, organizují a vytvářejí strukturu (Stehlíková, 2004). Během základního vzdělávání by měl každý pojem projít do fáze generických modelů. Abstraktní zdvih dává vzniknout abstraktním znalostem (Stehlíková, 2004). Druhý zdvih není nezbytně nutný v průběhu základní školy.

Začlenění nového poznatku do kognitivní struktury je nazýváno **krystalizace**. Po krystalizaci obvykle přichází automatizace, ta ale není zahrnuta do poznávacího procesu, protože během ní nedochází k získávání nových poznatků, pouze k procvičování stávajících znalostí. Automatizace je výsledkem opakovaného procvičování (Sternberg, 1999).

Hejný později rozšířil význam generického modelu na **procedurální generické modely** a **konceptuální generické modely** (Hejný, 2014). Procedurální znalost je tvořena dvěma částmi. Jedna část je tvořena formálním jazykem a symbolickou reprezentací. Druhá část se skládá z pravidel, algoritmů nebo procedur, potřebných k řešení matematických úloh (Hiebert, & Lefevre, 1986). Konceptuální znalost je propojená síť poznatků. Jednotka konceptuálních znalostí nemůže být izolovaná informace (Hiebert, & Lefevre, 1986).

V geometrii žákům předkládáme izolované modely budoucích pojmů. Pro pojem trojúhelník se může jednat o obrázky trojúhelníku či vystřižené papírové modely. Na šíři spektra izolovaných modelů závisí možnost zobecnění a vytvoření generického modelu pojmu. Vždy je třeba mít na paměti, že generický model může být vytvořen nesprávně. Je proto vhodné různými aktivitami průběžně kontrolovat, ve které fázi se poznávací proces nachází a zda k zobecněním dochází správně.

Problematika definování a měření matematické kreativity

Existuje celá řada definic matematického nadání, které se liší podle nástrojů na identifikaci a podle školního programu. Nakonečný (1993) např. uvádí, že **nadání** je chápáno jako vrozené předpoklady k výkonu. Schopnosti jsou pak chápány jako zkušeností rozvinuté nadání. Empiricky je však často nemožné rozlišit vrozené a získané psychické podmínky výkonu. Schopnosti jsou psychofyzické dispozice k výkonu a jsou obvykle chápány jako naučené, získané dispozice na rozdíl od nadání, které je vrozené. Stojíme však stále před otázkou, zda **výkon**, který měříme, opravdu odhaluje matematické nadání.

Hříbková (2009) uvádí, že podle Eysencka a Barretta je pojem nadání většinou definován třemi způsoby (Hříbková, 2009, s. 42):

- *„Na prvním místě je tento pojem definován **synonymně s vysokým IQ**, které bylo zjištěno testy inteligence. V současné době je tento způsob definování podle autorů preferován a uplatňuje se např. v biologických výzkumech nadání.*
- *Ve druhém případě se pojem nadání **vztahuje ke kreativitě**. Jak autoři uvádějí, samotný pojem kreativita je však užíván dvojím rozdílným způsobem. Je chápán jednak jako rys osobnosti nebo jako znak sociálně hodnotného výkonu. Tato dvě pojetí kreativity spolu však příliš nekorelují. Jedinec, který disponuje kreativním potenciálem (ten je zjišťován zejména testy divergentního myšlení), nemusí v životě podávat tvořivé výkony.*
- *Třetí způsob vymezuje pojem nadání jako **vysoký stupeň rozvoje speciálních schopností**. Protože vysoké speciální schopnosti nemusí korelovat s vysokým IQ, je podle autorů vhodné i logické omezovat se při vymezování pojmu na první způsob definování.“*

Renzulli vymezuje nadání jako interakci tří skupin vlastností (Hříbková, 2009, Portešová, 2011):

- nadprůměrných schopností,
- kreativity,

- angažovanosti v úkolu.

Kreativitu Renzulli chápe jako soubor tvořivých schopností a vlastností, ke kterému vztahuje především originalitu, flexibilitu, fluenci a elaboraci, tedy základní schopnosti divergentního myšlení a dále také tvořivé vlastnosti osobnosti, jako jsou otevřenost novým dojmům, tolerance vůči dvojznačnosti a funkční svoboda atd.

Fořtík a Fořtíková (2007, s. 12) představují tyto možné pohledy na nadání:

- *„Kvalitativně osobitý **souhrn schopností**, které podmiňují úspěšné vykonávání činnosti;*
- ***všeobecné schopnosti** nebo **všeobecné prvky schopností**, které podmiňují schopnosti člověka, úroveň a vlastnosti jeho činností;*
- ***rozumový potenciál** nebo **inteligenci**, celostní individuální charakteristiku poznávacích možností a schopností učit se;*
- *souhrn vloh, vrozených daností, projev úrovně a vlastností vrozených předpokladů;*
- ***talent**, existenci vnitřních podmínek pro dosahování vynikajících výsledků v činnosti.“*

Základním předpokladem **nadaného žáka** je úroveň rozumových dovedností (Fořtík, & Fořtíková, 2007). Většina autorů se dnes již shoduje, že nadání není možné posuzovat z pouhého výsledku inteligenčního testu. Odborníci v této oblasti se však domnívají, že intelekt tvoří základ pro rozumové nadání (Fořtík, & Fořtíková, 2007). Podle pojetí Nordbyho se za nadaného považuje jedinec s IQ 130 a vyšším (Fořtík, & Fořtíková, 2007).

Jelikož neexistuje jednoznačná definice matematického nadání, je hledání nadaných žáků velkou výzvou jak pro učitele, tak pro společnost. Nadání je obvykle diagnostikováno na základě školního výkonu, testování nebo doporučení (rodičů nebo učitele). Existuje zjevná nesrovnalost mezi školním výkonem a matematickými schopnostmi, která způsobuje, že někteří nadaní žáci jsou ve školním prostředí přehlíženi. Testování, které je u nás nejčastějším způsobem identifikace nadání, je velice nebezpečné zejména v tom, že neodhaluje schopnost řešit problémy, které vyžadují nezávislost, rozhodování, originalitu a kreativitu. Skutečně nadaní žáci obvykle mají všechny zmíněné charakteristiky a potřebují mít možnost uplatnit je při řešení problémů, které jsou pro ně výzvou (Mann, 2006). Pokud jsou žáci vedeni způsobem, kdy přebírají instrukce od svého učitele a mají za úkol si osvojit postupy, hrozí jim riziko ztráty zájmu o matematiku.

Pro rozvoj matematického talentu je nezbytná **matematická kreativita**. V literatuře lze najít mnoho definic, vyjadřující matematickou kreativitu. Runco (1993, s. ix) popsal kreativitu jako mnohostranný pojem, zahrnující *„divergentní a konvergentní myšlení, hledání problémů a řešení problémů, sebevyjádření, vnitřní motivace, schopnost* *kladení otázek a matematické sebevědomí"*. Nakonečný (1993) uvádí, že kreativita je velmi komplexní schopnost, v níž se vedle faktorů kognitivních uplatňují i faktory motivační a neintelektové rysy osobnosti. Zjednodušeně řešeno, podstatou tvořivosti je originalita, ale nikoli originalita za každou cenu, ale originalita společensky hodnotná.

Balka (1974) představil kritéria pro měření schopnosti matematické kreativity. Zmínil jak **konvergentní myšlení**, charakterizované sledováním určeného vzoru a hledající obvykle jednu správnou odpověď, tak **divergentní myšlení**, definované jako formulování matematických hypotéz, vyhodnocování nezvyklých matematických myšlenek, pochopení jádra problému. Ve výuce matematiky však jistě nejde jen o divergentní myšlení, v přírodních vědách se uplatňuje kompozice, hierarchizace, dekompozice, restrukturace, součástí přírodovědného hledání je i korekce, ověřování, komparace a další procesy, které vyžadují jiné myšlenkové procesy (Kaslová, 2011). Tvorba nemusí být jen procesem intuitivním, ale i vědomým.

Požadavek divergentního myšlení může být ve školním prostředí pro kreativní žáky velký problém (Mann, 2006). Je-li třídní praxe založena na rychlém a precizním hledání jediné odpovědi na danou otázku, kreativní žák se cítí demotivován. Raději hledá odpovědi na otevřené problémy, než opakuje postup učitele. Tím může vznikat třecí plocha mezi učitelem a žákem.

Dalším specifikem kreativních dětí je to, jakým způsobem pracují s chybou. Dá se předpokládat, že některé děti umí pracovat s chybou a některé neumí. Překvapující ale je, že jsou děti, které milují výzvy a své chybování vlastně vůbec nevnímají jako chybování, ale jako učení. Klasická výuka je nastavena tak, že chybování znamená, že „nejsi chytrý" (Dweck, 2008).

Ukazuje se, že kreativita je nutným elementem fáze pochopení. Sarrazy (2011) zmiňuje, že rozdíl mezi dobrým a špatným žákem se nezakládá na znalostech algoritmů, ale spočívá ve způsobu jejich užití. Mnohdy se žák v matematice látku naučí, ale nepochopí ji, neumí ji použít. Memorování naučených pravidel nezaručí, že žák pozná, kdy a jak má daná pravidla aplikovat. Tvorba je nástrojem i kritériem žákova učení. Žák se učí tím, že rozvíjí a řeší nové problémy (Sarrazy, 2011).

Rozvoj geometrických pojmů – případové studie

Měla jsem možnost pracovat společně se svými kolegyněmi z Katedry matematiky PdF MU s matematicky nadanými žáky prvního stupně základní školy a pozorovat je během několika geometrických aktivit. Nadání těchto žáků bylo diagnostikováno v pedagogicko-psychologické poradně na základě IQ a jejich schopností a výkonu v hodinách matematiky. Za talentované jsou obvykle považováni žáci s IQ nad 130, přestože je známo, že IQ není jediným předpokladem pro školní úspěch (Fořtík, &

Fořtíková, 2007, Zhouf, 2010), jak bylo výše uvedeno. Proto pro nás byla také důležitá motivace pro řešení matematických problémů.

Během práce s 16 dětmi ve věku 6 až 11 let, která se vztahovala k vytváření pojmů v geometrii, jsem si kladla následující otázky:

- V jaké fázi je kognitivní proces matematicky nadaných žáků prvního stupně v učivu geometrie?
- Které termíny znají, a jak popíší ty, které neznají?
- Jsou představy pojmů formovány správně?

Abych našla odpovědi na tyto otázky, připravila jsem pro děti geometrickou aktivitu, ve které popisovaly geometrické obrazce, což pro ně byla velká výzva.

Můžeme říci, že aktivity, které byly dětem nabídnuty, patří do experimentální geometrie. Jak napsal Freudenthal (1973, s. 407), *„jestliže experimentální geometrie znamená, že student experimentuje, pak velká část jeho matematické aktivity by měla být experimentální, jako je aktivita kreativních matematiků."* Experimentální geometrie by neměla evokovat pouhé hraní. *„Experimentální vstup do geometrie představuje spodní stupeň aktivity, který připraví žáky na vyšší stupně"* (Freudenthal, 1973, s. 408).

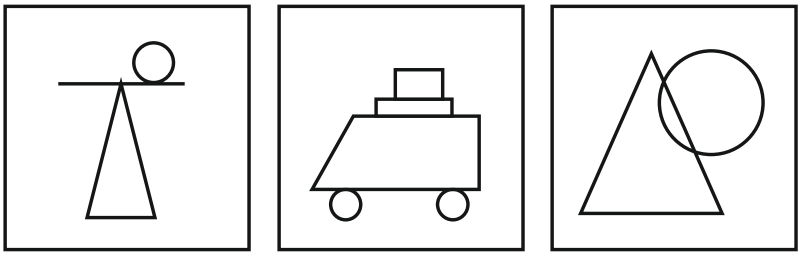
V návaznosti na aktivity pro nadané děti prvního stupně ZŠ byly sestaveny činnosti pro předškolní děti, které by poukázaly, jak v předškolním věku vznikají představy geometrických pojmů, a činnosti pro žáky prvního a druhého ročníku, zjišťující totéž.

Vedle rozvoje schopností je potřeba vytvářet podmínky pro vytváření poznatků a dovedností, jako např. označení geometrických útvarů. Žáci prvního stupně ZŠ mají přirozenou schopnost popisovat věci ve svém okolí nebo geometrické útvary svými vlastními slovy. Tuto schopnost můžeme označit jako používání **autonomního jazyka**, což znamená, že děti používají slova, která samy vymyslí, nebo použijí výrazy, které znají z analogických situací (Budínová, 2015). Možnost aplikace svého vlastního jazyka dětem umožňuje poznat své limity ve vyjadřování, které jim pomáhají osvojit si a zapamatovat nové termíny. V geometrii na prvním stupni neuvádíme definice, namísto toho postupně utváříme představu o pojmu pomocí různých reprezentací. Důležité přitom je, aby se neutvářely chybné představy, které znesnadňují vývoj pojmu.

Žáci, kteří se účastnili geometrických aktivit, neradi řešili standardní úlohy a vnímali je jako ztrátu času. Touto charakteristikou se nelišili od nadprůměrných žáků. Abychom u těchto žáků nezpůsobili demotivaci, museli jsme jim nabízet takové aktivity, které je dostatečně stimulovaly. Aktivita s popisováním geometrických útvarů patřila k velmi oblíbeným.

Rozvoj geometrických pojmů pomocí autonomního jazyka

Nejen ve světě (Arnas Aktas, & Aslan, 2010, Dindyal, 2015, Duval, 1999, Hannibal & Clements, 2000), ale i u nás se doporučuje ponechat žákům v počátečních fázích poznávacího procesu v geometrii jistou volnost a nechat je užívat autonomní jazyk. Požádala jsem žáky prvního stupně, aby spolužákovi popsali určitý geometrický obrázek svými vlastními slovy. Žáci sedí zády k sobě, jeden z nich má obrázek s geometrickými útvary a diktuje druhému, co má kreslit. Žák, který diktuje, by neměl vidět, co druhý kreslí, protože by ho to svádělo ke změně diktátu a rovněž gestikulaci. Úkoly mohou mít různou obtížnost. Některé z obrázků, se kterými děti pracovaly, jsou uvedeny na obrázku 2.



Obrázek 2. Geometrické obrázky

Geometrické aktivity navštěvovalo 16 nadaných žáků prvního stupně. Nejmladší dívce bylo 6 let a měla velké problémy aktivitě porozumět. Zpočátku nemohla pochopit, co se od ní vlastně očekává. Nakonec byla alespoň schopna kreslit to, co jí diktovala kamarádka. Potíže s uchopením úkolu u dětí zejména prvního ročníku mohou mít v podstatě dvě příčiny:

1) Různá míra rozvoje prostorové představivosti a schopnosti analyticko-syntetického vnímání. Děti jsou pedagogicko-psychologickou poradnou diagnostikovány jako matematicky nadané, avšak je potřeba odlišovat část aritmeticko-algebraickou a geometrickou. V případě této dívky byly výsledky z pedagogicko-psychologické poradny vztaženy pouze k aritmetické části.
2) Nepřipravenost na řešení nového typu úloh, které jsou formulovány otevřeně.

Nejstaršímu chlapci bylo 11 let a jeho matematické schopnosti byly takové, jako by mu bylo 14. Některé popisy žáků uvedeme v následujícím textu.

Dva žáci čtvrtého ročníku, Lukáš a Patrik, pracovali s obrázky. Nejdříve diktoval Lukáš Patrikovi první obrázek. Podívejme se, které termíny k popisu použil.

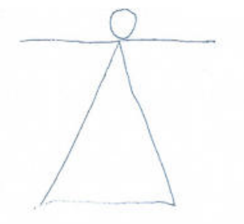
Příběh 1:

L: *„Nakresli trojúhelník, na tom čáru."*

P: *„Jakou čáru?"*

L: *„Přímku. Na vrcholu na přímce je kulička."*

Výsledek diktování vidíme na obrázku 3.



Obrázek 3. Patrikův obrázek

Komentář příběhu 1:

Můžeme sledovat, že žák 4. ročníku vnímá automaticky trojúhelník jako rovnoramenný trojúhelník. Nepožadoval po spolužákovi doplňující informaci a nakreslil rovnoramenný trojúhelník. Čára už je pro něj nedostatečné pojmenování, nevnímá ji automaticky jako přímku nebo úsečku a požaduje doplňující informaci. Neptá se ale na směrové umístění úsečky, automaticky ji zakresluje vodorovně a navíc je vrchol trojúhelníku uprostřed úsečky (opět bez doplňujícího dotazu). Kuličku neboli kružnici umísťuje symetricky, do středu úsečky a neptá se na její velikost. Navíc není jasné, zda si žák při zakreslování představoval kuličku nebo kružnici.

Zde se setkáváme se splýváním roviny s prostorem, což je v zobrazování dětí typické. Dítě se při použití autonomního jazyka vrací do vývojově nižší etapy zobrazování, v níž mu splývají 2D a 3D objekty a vybírá si tu situaci, která je pro něj jazykově snazší. Je přitom zajímavé, že dítě vyjadřuje „kružnici" jako „kuličku", což by spíše předpokládalo transformaci do kruhu.

Příběh 2: V pořadí třetí obrazec na obrázku 2 diktoval Patrik Lukášovi.

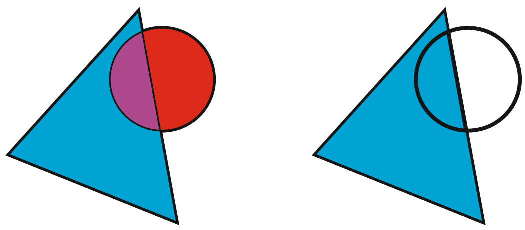
P: *„Nakresli trojúhelník. Potom kruh, který má dva společné body s trojúhelníkem a je na pravé straně."*

Výsledek vidíme na obrázku 4.

Obrázek 4. Lukášův obrázek

Komentář příběhu 2:

Trojúhelník nemůže mít podle definice dva společné body s kružnicí ani s kruhem, jak je vidět na obrázku 5 (trojúhelník je hranice i s vnitřní oblastí). Děti čtvrtého ročníku se ale pochopitelně s definicí trojúhelníku neseznamují a představa vzniká podle toho, které útvary jsou označovány za trojúhelník. Žák se opírá o nejfrekventovanější obrázky či modely v učebnicích, na tabuli a v dalších výukových materiálech pro žáky, kde je prezentována jen hranice útvaru. Žák proto chápe trojúhelník jako vnější hranici trojúhelníku.



Obrázek 5. Průnik trojúhelníku s kruhem nebo kružnicí

Vzájemná poloha trojúhelníku a kružnice nebyla dostatečně popsána, ale Lukáš se neptal na doplňující informace. Posléze zjistil, že umístil kružnici jinak.

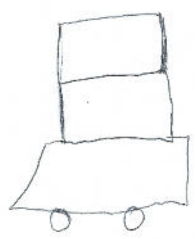
Příběh 3: Druhý obrazec na obrázku 2 diktoval opět Lukáš Patrikovi:

L: *„Nahoře je obdélník, na šířku je větší. Pod ním je druhý obdélník."*

P: *„Mají společné body?"*

L: *„Jednu stranu. Pod tím na šířku větším je větší obdélník, levou kratší stranu má zešikma směrem doleva. Má společnou jednu stranu s tím nad ním. Ten větší má na levé straně kolečko a na pravé taky."*

Výsledek vidíme na obrázku 6.



Obrázek 6. Obrázek Patrika

Komentář příběhu 3:

Popis je poměrně nepřesný, přesto se obrázek podobá předloze. Obrázek obsahuje útvary obdélník, lichoběžník, kružnice. Jsou důležité proporce objektů (např. šířka a výška obdélníku) a vzájemná poloha obrazců. Proporcí a vzájemných poloh objektů si však žák nevšímá. Kružnice byla pojmenována jako „kolečko“ a lichoběžník jako „obdélník s jednou šikmou stranou“. Zatímco kružnice je nejspíš termín žákovi známý, pouze nesprávně používaný, s termínem „lichoběžník“ se zřejmě žák doposud nesetkal. Žák popisuje útvar výstižně, pomocí dosud známých termínů, avšak sám žák zřejmě cítí potřebu nového termínu, který by popis urychlil a učinil jednoznačným. Učitel tedy dostává možnost žáky s tímto termínem seznámit.

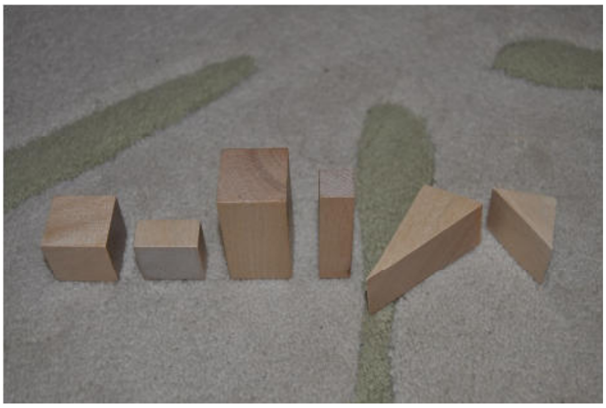
Rozvoj geometrických pojmů v předškolním věku

Je všeobecně uznáváno, že má smysl diagnostikovat nadání dětí až v průběhu prvního stupně základní školy. Mladší děti špatně spolupracují při testování. Zkušenosti nám ale napovídají, že už u předškolních dětí lze nadání odhadnout, a to na základě zvýšeného zájmu dítěte o matematiku. Pokud jsou dětem nabízeny matematické pomůcky – ať už aritmetické nebo geometrické – vyprofilují se mezi nimi takové, které sáhnou po matematické pomůcce daleko raději než po jiných pomůckách nebo dokonce hračkách. Tyto děti označujeme jako **potenciálně nadané** a je vhodné je v oblasti jejich zájmu i nadále pozorovat a podporovat.

Pětiletý, potenciálně nadaný předškolák Matěj, jevil již od tří a půl let mimořádný zájem o čísla a geometrii. Hrál si s tajemným sáčkem, obsahujícím modely geometrických těles.

Obrázek 7. Tajemný sáček

Se zavázanýma očima vytahoval ze sáčku útvary a hmatem poznával, o model jakého tělesa se jedná.

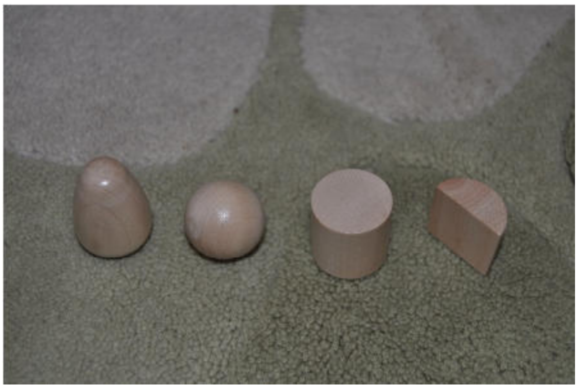


Obrázek 8. Modely hranatých těles

Nejdříve u něj docházelo k zaměňování trojrozměrných objektů za dvojrozměrné a označování objektu podle funkce, kterou představoval. Krychli a první kvádr na obrázku 8 Matěj označoval za „čtverec“. Druhý a třetí kvádr již označoval za „obdélník“. První hranol označoval za „skluzavku“ a druhý hranol za „střechu“. Byl seznámen s oficiálními geometrickými termíny.

Když hrál podruhé (zhruba s týdenním odstupem), označoval krychli jako „krychli“, první kvádr jako „čtverec“ nebo „krychli“ (říkal, že si nemůže vzpomenout), další kvádry jako „obdélníky“ a oba hranoly překvapivě jako „trojboké hranoly“. Dokonce dokázal spočítat boční stěny, aby zdůvodnil, proč je trojboký. Nejproblematičtější ze všech hranatých těles byl tedy kvádr, který si dlouho nemohl zapamatovat.

Matěj byl speciálně stimulován tím, že mu byly sděleny názvy těles a jím užitá terminologie svědčí o přijetí těchto slov do jeho aktivní slovní zásoby v adekvátním kontextu. Přesto nemůžeme mít jistotu, zda byl správně nastartován pojmotvorný proces. Například lze sledovat Matějovy obtíže s druhým tělesem, kdy jako dominantní vnímá znak jedné čtvercové podstavy. Na druhou stranu jeho vysvětlení, proč páté a šesté těleso nazval jako trojboký hranol, naznačuje správné pochopení charakteristiky tělesa.



Obrázek 9. Modely oblých těles

Z oblých těles označil první jako „vajíčko“, druhé bez problému jako „kouli“, třetí jako „válec“ a čtvrté jako „rozpůlený válec“.

Zajímavé bylo, že Matěje sledovala jeho o rok a půl mladší sestra Maruška. Nejevila tak velký zájem o matematiku, ale vždy, když se Matěj něco učil, pozorovala jej a mnoho se při tom naučila. Uměla tak už počítat do dvaceti (a to i heterogenní skupiny objektů) a odpovídat na otázky typu „kolik je 2 plus 2?“ nebo „kolik je 2 plus 3?“. Zpočátku jsem si nebyla jista, zda si Maruška tyto spoje nepamatuje jako název básničky. Zeptala jsem se, jak to ví, že „2 plus 3 je 5“. Vztyčila dva prsty, řekla „raz dva“, a pak pomocí dalších prstů dopočítávala „raz dva tři“. Nyní měla vztyčeno 5 prstů a druhou rukou spočítala „raz dva tři čtyři pět“.

Chtěla hrát hru s tajemným sáčkem také. Se zavřenýma očima vytahovala předměty a hmatem je poznávala. Kouli označila jako „kuličku“ a po chvíli se opravila na „kouli“. První kulatý předmět na obrázku 9 za „kapičku“ nebo „vajíčko“. Kvádr označila jako „čtverec“ a úzký kvádr jako „malinký čtverec“. Válec označila správně jako „válec“, půlku válce jako „střechu“ a hranoly jako „trojboký hranol“ – to měla zjevně dobře naposlouchané od bratra.

Na závěr si děti společně postavily z kostek stavbu. Stavba je souměrná podle roviny kolmé k rovině podlahy a to ve směru pravo-levém vzhledem k dítěti. Sklon k symetrii je specifický pro děti předškolního, mladšího školního a často také staršího školního věku.

Obrázek 10. Stavba dětí

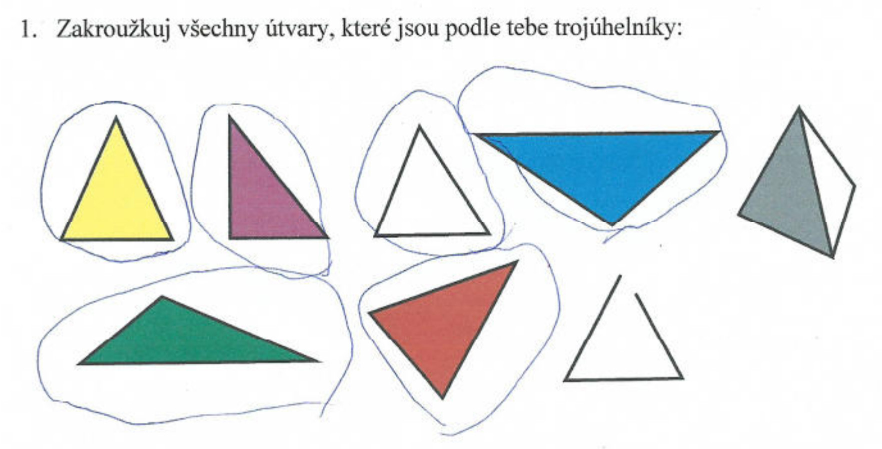
Z mnohých činností s předškolními dětmi se jeví evidentní, že děti zhruba od čtyř let mají velkou schopnost absorbovat nové termíny, a to i geometrické. Je to vhodné období pro zavádění odborných geometrických termínů. V reálné výuce se předškolní děti s geometrickými názvy buď nesetkají vůbec, nebo se nechávají, aby předměty nazývaly jinými názvy (střecha, skluzavka, aj.). Nezřídka jsme se setkali i s tím, že sama učitelka nazývala krychli jako „čtverec", kvádr jako „obdélník", trojboký hranol jako „trojúhelník". Učitelé na druhém stupni potom nedokážou překonat bariéru neschopnosti žáků nazývat trojrozměrné objekty správnými názvy. Kaslová prováděla výzkum u předškolních dětí. Zjistila, že velmi problematické je zaměňování dvojrozměrných a trojrozměrných objektů. Jestliže se děti v mateřské škole setkaly s tím, že např. trojboký hranol byl označován jako trojúhelník, je pro určitou část z nich nepřekonatelný problém se tohoto zaměňování zbavit v průběhu základní školy. Ze sondy (2007) na čtyřech třídách pátého ročníku ZŠ a třech třídách v devátém ročníku ZŠ se jevilo, že vytvořený blokátor (splynutí 3D a 2D prostoru) je pro 30 % desetiletých a 11 % čtrnáctiletých neodstranitelný (Kaslová, 2015). Žáci se odvolávají na zkušenost z mateřské školy, že trojboký hranol byl označován jako trojúhelník. Přestože sonda nemá příliš velkou výpovědní hodnotu, jsou problémy žáků s geometrickými termíny zjevné.

Je zajímavé, že kdyby děti označovaly hlavu jako balón, byly by zřejmě opraveny, přestože je hlava „kulatá". Obdobně kdyby ruku nazvaly větvičkou, nebyly by za to pochváleny. Škoda, že se stejně precizně nepřistupuje i ke geometrickým pojmům. Mnohokrát jsme se v reálné výuce na prvním stupni setkali s tím, že žák pracoval s 3D objektem, např. krychlí, nazval jej čtvercem a paní učitelka odpověď označila za správnou.

Jak je to tedy s ponecháváním volnosti žákům při popisu geometrických útvarů a používáním jejich autonomního jazyka? Dítě má tendence označit např. trojboký hranol jako střechu. Tento okamžik je důležitý pro učitele, který má možnost zjistit, že se dítě s termínem „hranol" buď nesetkalo, nebo ho nepřijalo do své aktivní slovní zásoby. To je přínos autonomního vyjadřování. Nemělo by však u něj zůstat, žák by se měl seznamovat s oficiálními názvy.

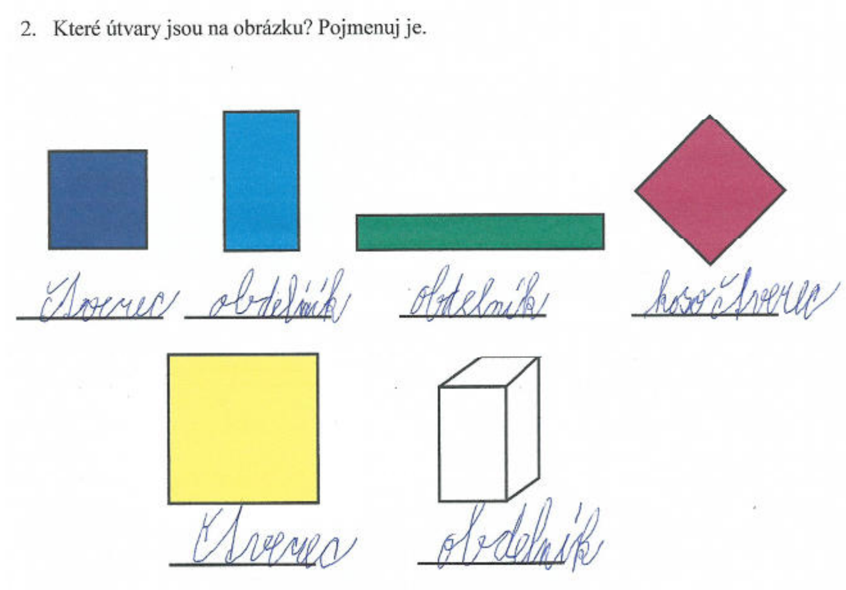
Poznávací proces v geometrii žáka druhého ročníku

Vznikla zajímavá otázka, zda dochází k nějakému zásadnímu posunu v poznávacím procesu u žáka mezi mateřskou školou a druhým ročníkem. Matematicky mimořádně nadanému žákovi druhého ročníku Adamovi byly zadány dva geometrické úkoly. První z nich je na obrázku 11.



Obrázek 11. První geometrický úkol pro Adama

Adam bezchybně označil všechny trojúhelníky. Jediný diskutabilní obrázek je třetí, protože trojúhelník je definován jako část roviny a zde by se mohlo jednat pouze o hranici. Protože se ale zatím Adam setkává s vymezením trojúhelníku pomocí izolovaných modelů, nemohlo jej nic podobného napadnout. Pozitivní je, že za trojúhelník neoznačil trojrozměrné těleso a otevřenou lomenou čáru. Adam byl dotázán, podle čeho poznal trojúhelník. Odpověděl: „*Protože trojúhelník má tři strany a tři úhly*." Ačkoli se jedná o žáka druhého ročníku, jeho pohled na útvar je již analytický. Nepřirovnává trojúhelník ke známé věci (jako např. střecha), ale uvádí jeho charakteristické vlastnosti.



Obrázek 12. Druhý geometrický úkol

Druhý úkol již nedopadl tak jednoznačně, Adam chyboval ve čtvrtém a šestém případě. Ptala jsem se, proč fialový čtverec označil jako kosočtverec. Odpověděl: *„Protože to je jako čtverec, ale otočený*.“ Je vidět, že riziko záměny těchto pojmů vzniká již ve velmi útlém věku.

Vidíme, že i žák druhého ročníku má stále problémy se zaměňováním dvojrozměrných a trojrozměrných objektů, kvádr je označen jako „obdélník“. Vzhledem k tomu, že Adamova školní výuka matematiky probíhala zcela klasicky, tj. učil se rýsovat úsečky, trojúhelníky a čtverce, ale nesetkal se s manipulací s prostorovými útvary, jde o přirozený důsledek.

Sonda svědčí o tom, že Adam dovede identifikovat standardní obrázky. Některé pojmy však nejsou usazené, dochází k překryvu nebo posunu představ ve spojení s terminologií. To svědčí o nedokončenosti poznávacího procesu. Příčiny mohou být v tom, že představy žáka vznikají zcela nekontrolovatelně, bez učitelovy účasti. Jak Adam došel k závěru, že čtverec postavený na vrchol je kosočtverec? Pravděpodobně na základě toho, že čtverce bývají v učebnicích postaveny na stranu, zatímco kosočtverec bývá postaven na vrchol. Adam si nyní nevšímá vlastností útvaru, řídí se jen podle vnímání útvaru. Není-li chyba v terminologii opravena, dítě samo sebe utvrzuje ve své představě. Je patrné, že v případě čtverce se Adam nachází na pomezí vizualizace a analýzy – ví, že čtverec má čtyři strany (opticky tyto strany navíc musí působit shodně), ale další charakteristiky (kolmost sousedních stran) si nevšímá. Na otázku, jak poznal, že pátý obrázek představuje čtverec, odpověděl: *„Má 4 strany.“* Nakreslila jsem obdélník a zeptala se, zda se také jedná o čtverec. Odpověděl: *„Ty strany u čtverce musí být stejné.“*

Závěr

Rozvoj geometrických pojmů pomocí autonomního jazyka

Jak jsme mohli sledovat, kognitivní proces každého žáka byl v odlišné fázi, a to i u žáků stejného věku. Někteří z nich neznali pojmenování daného útvaru, někteří měli nesprávně vytvořené představy. Učitel měl příležitost seznámit žáky se správnými názvy objektů. Rovněž měl možnost odhalit některé nesprávné představy a pomoci žákovi tyto představy přehodnotit.

Žáci prvního stupně si na základě izolovaných modelů pro dané pojmy utvářeli představy, které byly více či méně přesné. Záleží na šíři a variabilitě izolovaných modelů, zda poznávací proces probíhá správně. U nadaných dětí můžeme sledovat, že poznávací proces postupuje rychleji než u vrstevníků. To může znamenat i to, že nadaný žák pátého ročníku mohl dojít k zobecnění a nachází se na úrovni konceptuálních generických modelů. V tomto stádiu je schopen útvary charakterizovat pomocí základních vlastností, pracuje s abstrakty a nikoli s konkrétními objekty.

Bylo velmi zajímavé sledovat **vývojové linie** každého pojmu. Např. pojem trojúhelníku měl obvykle následující vývojovou linii:

rovnoramenný (případně rovnostranný) trojúhelník, který má základnu rovnoběžnou s okrajem papíru (někdy pouze hranice) ⇨ ostroúhlý trojúhelník, který má základnu rovnoběžnou s okrajem papíru ⇨ ostroúhlý trojúhelník ⇨ obecný trojúhelník

Zpočátku se jejich představa trojúhelníku utvářela na základě modelů, které viděli v učebnicích či jiných materiálech. Na prvním stupni je toto obvykle konečné stádium. Někteří nadaní žáci se o pojmy a možnosti jejich definování zajímají samostatně a své poznatky si mohou rozšiřovat do větší abstrakce.

Žáci se obvykle nezajímali o proporce, pouze odhadovali velikosti. Např. v případě obdélníku řekli spíše „je širší než delší“ nežli „je dvakrát širší než delší“. Speciálně mladší děti silně inklinovaly k symetrii.

Děti byly nuceny spolu komunikovat a hledat cesty, jak popsat geometrické obrázky. Vyjadřovaly se velmi přirozeně. Když neznali potřebný pojem, popsali jej jinými slovy. Aktivita rozvíjela jejich prostorovou představivost, stejně jako schopnost popsat to, co vidí. Přestože to vypadalo, jako by si jen hrály, ve skutečnosti se učily. Konkrétně se učily co nejpřesnějšímu vyjadřování.

Poznávací proces v geometrii žáka druhého ročníku

Jestliže žákům nejsou v oblasti geometrie nabízeny žádné stimuly, dochází ke stagnaci pojmotvorného procesu. Adam dokázal identifikovat trojúhelník z nabídnutých útvarů, dokázal také vyslovit určitou specifikaci trojúhelníku, kterou jsou tři strany a tři úhly. V případě čtverce byla představa vytvářena nepřesně: Adam se soustředil na orientaci čtverce, ale důležité charakteristiky čtverce – pravých úhlů mezi sousedními stranami – si nevšímal.

Nadaný žák 2. ročníku se zaměřoval částečně na vizuální atributy a částečně na vlastnosti. V některých případech, jako např. u čtverce, používal oba atributy současně. Nejdříve se řídil pouze tím, jak na něj útvar působil – podle toho jeden čtverec označil jako čtverec a druhý jako kosočtverec. Uvědomoval si však i jednu z vlastností čtverce – čtyři shodné strany.

Doporučení do praxe

Během pojmotvorného procesu u dětí raného věku je třeba sledovat dva základní aspekty:

1) přesnost formující se terminologie,
2) utváření správných představ o pojmu.

Při výuce geometrie je vhodné žákům prezentovat co nejvíce izolovaných modelů vztahujících se k danému pojmu. Žákům by měly být průběžně představovány oficiální názvy útvarů. Učitel má možnost sledovat utváření pojmotvorného procesu pomocí vhodných aktivit, během nichž se projeví terminologická nepřesnost a také nesprávné představy.

U nadaných žáků lze očekávat, že pojmotvorný proces může postupovat rychleji, než je obvyklé v běžné populaci. Zatímco v běžné populaci dochází k postupnému prolínání vizualizace a analýzy v 3. až 4. ročníků ZŠ, u nadaných žáků se s tímto fenoménem setkáváme dříve. Aby však žák mohl postupovat mezi jednotlivými úrovněmi a aby byly vytvářeny správné představy, je i u nadaných nutné podnětné prostředí.

Pokud se týká zaměňování 3D za 2D objekty, jako např. kvádru za obdélník, lze doporučit používat ve výuce trojrozměrné modely těles a zdůraznit rozdíl mezi tělesem a jeho stěnou. Těleso se nazývá kvádr, jeho stěny jsou obdélníky, případně čtverce.

Literatura

Arnas Aktas, Y., & Aslan, A. G. D. (2010). *Children's Classification Of Geometric Shapes*. Çukurova Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi.

Balka, D. S. (1974). Creative ability in mathematics. *Arithmetic Teacher, 21*, s. 633 – 636.

Budínová, I. (2015). Development of communicating about notions in geometry at primary school. In Kopáčová, & J., Žilková, K. (Eds.): *Studia Scientifica Facultatis Paedagogicae.* Ružobmerok: Verbum, Universitas Catholica Ružomberok, s. 43 – 47

Dindyal, J. (2015). Geometry in the early years: a commentary. *ZDM Mathematical Education*. FIZ Karlsruhe.

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualisation: cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. In F. Hitt, & M. Santos (Eds.): *Proceedings of the 21st annual meeting of the North American chapter of the International Group for the Psychology of Mathematic Education*, s. 3 – 26. Columbus: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Enviromental Education.

Dweck, C. S. (2008). *Mindset. The New Psycholody of Success.* New York: Ballantine Books.

Fořtík, V., & Fořtíková, J. (2007). *Nadané dítě a rozvoj jeho schopností.* Praha: Portál.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task.* Dordrecht – Holland: D. Riedel Publishing Company.

Giaquinto, M. (2007). *Visual Thinking in Mathematics. An epistemological study*. Oxford: University Press.

Hannibal, M. A. Z., & Clements, D. H. (2000). *Young children's understanding of basic geometric shapes.* National Science Foundation, Grant number: ESI-8954644.

Hejný, M. (1990). *Teória vyučovania matematiky.* (2. vyd.), Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo.

Hejný, M. (2014). *Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně.* Praha: PdF UK.

Hejný, M., & Kuřina, F. (2001). *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování*. Praha: Portál.

Hershkowitz, R. (1989). Visualisation in geometry: two sides of the coin. In *Focus on Learning Problems in Mathematics,* 11 (1), s. 61 – 67.

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In Hiebert, J. (Ed.): *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Hoffer, A. (1981). Geometry is more than proof. *Mathematics Teacher,* 74, s. 11 – 18.

Hříbková, L. (2009). *Nadání a nadaní.* Praha: Grada.

Jirotková, D. (1990). *Rozvoj prostorové představivosti žáků.* Komenský 114, 5, s. 278 – 281

Jirotková, D. (2012). *Cesty ke zkvalitňování výuky geometrie.* Praha: Pedagogická fakulta, Univerzita Karlova.

Kaslová, M. (2011). Didaktické prostředí a tvořivost dítěte / žáka. In Pěchoučková, Š. (Ed.) *Tvořivost v počátečním vyučování matematiky*, (105 – 109). Plzeň: ZČU.

Kaslová, M. (2015). Připravenost dítěte k zápisu do základní školy. *Studia scientifica Facultatis Paedagogicae. Uniersitas catholica Ružomberok.* Ročník XIV., číslo 2. Ružomberok: Verbum.

Kolektiv autorů (2007). *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání.* Praha: VUP.

Kuřina, F. (2009). *Matematika a porozumění světu.* Praha: Academia.

Lester, F. K. (1985). Methodological considerations in research of mathematical problem solving. In E. A. Silver (Ed.): *Teaching and learning mathematical problem solving. Multiple research perspectives.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum and Associates.

Mann, E. L. (2006). Creativity: The Essence of Mathematics. *Journal for the Education of the Gifted.* 30 (2), 2006, s. 236 – 260. Prufock Press Inc.

Molnár, J. (2004). *Rozvíjení prostorové představivosti (nejen) ve stereometrii.* Olomouc: Univerzita Palackého.

Molnár, J., Perný, J., & Stopenová, A. (2006). *Prostorová představivost a prostředky k jejímu rozvoji.* Praha: JČMF.

Moss, J., Hawes, Z., Naqvi, S., & Caswell, B. (2015). Adapting Japanese Lesson Study to enhance the teaching and learning of geometry and spatial reasoning in early years classroom: a case study. *ZDM Mathematics Education,* 47 (3).

Nakonečný, M. (1993). *Základy psychologie osobnosti.* Praha: Management Press.

Pehkonen, E. (1997). The state-of art in mathematical creativity. *International Reviews on Mathematical Education,* 29, s. 63 – 67. Staženo z

http://www.emis.de/journals/ZDM/zdm973i.html

Pehkonen, E., & Pietilä, A. (2003). On relationships between beliefs and knowledge in mathematics education. *Proceedings of the CERME-3 (Bellaria) meeting.* Staženo z http://www. dm. unipi. it/~ didattica/CERME3/draft/proceedings_draft/TG2_draft

Piaget, J. (1975). *The child's conception of the world.* Totowa, NJ: Littlefields, Adams.

Piaget, J. (1983). Piaget's theory. In P. Mussen (Ed.): *Handbook of Child Psychology.* New York: Wiley.

Piaget, J., & Inhelder, B. (1967). *The child's conception of space.* New York: W. W. Norton.

Portešová, Š. (2011). *Rozumově nadané děti s dyslexií.* Praha: Portál.

Ruisel, I. (2004). *Inteligencia a myslenie.* Bratislava: Ikar.

Runco, M. A. (1993). *Creativity as an educational objective for disadvantaged students.* Storrs: University of Connecticut, The National Research Center on the Gifted and Talented.

Sarrazy, B. (2011). Tvorba v matematice: Nezbytná iluze? In Pěchoučková, Š. (Ed.): *Tvořivost v počátečním vyučování matematiky.* (24 – 37), Plzeň: ZČU.

Sriraman, B. (2008). Mathematical giftedness, problem solving and the ability to formulate generalizations. In Sriraman, B. (ed.): *Creativity, Giftedness, and Talent Development in Mathematics.* New York City: IAP.

Stehlíková, N. (2004). *Structural Understanding in Advanced Mathematical Thinking.* Praha: Pedagogická fakulta, Karlova univerzita.

Sternberg, R. J. (1999). *Kognitivní psychologie.* Praha: Portál.

Šarounová, A. (1982). *Geometrická představivost* (disertační práce). Praha: UK

Thomson, M. (2006). *Supporting Gifted and Talented Pupils in the Secondary School.* Paul Chapman Publishing, London.

Tipps, S., Johnson, A., & Kennedy, L. M. (2011). *Guiding Children's Learning of Mathematics.* Wadsworth, Cengage Learning.

Tsamir, P., Tirosh, D., Levenson, E., Barkai, R., & Tabach, M. (2015). Early years teachers' concept images and concept definitions: triangles, circles, and cylindres. *ZDM Mathematics Education*, 47 (3).

van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight: a theory of mathematics education.* Orlando: Academic Press.

Žilková, K. (2013). *Teória a prax geometrických manipulácií v primárnom vzdelávání.* Praha: Powerprint.

Mgr. Irena Budínová, Ph.D.

S nadanými žáky se setkává v rámci mimoškolních aktivit. Rodiče matematicky nadaných dětí za ní přicházejí se svými dětmi pro rady, nejčastěji v souvislosti s nepochopením dítěte ze strany učitele, nedostatku podnětných materiálů, ale také s problémy spojenými s dvojí výjimečností aj.

Kontaktní údaje:

Katedra matematiky Pedagogcké fakulty Masarykovy univerzity v Brně, Poříčí 31,

603 00 Brno, email: irena.budinova@seznam.cz