

**MATEMATICKÉ NADÁNÍ**

Dagmar Malinová

*Katedra matematiky a ICT, Pedagogická fakulta, Univerzita Jana Evangelisty Purkyně  
v Ústí nad Labem*

**Abstrakt:** Matematické nadání je specifické intelektové nadání. Jedinci s matematickým nadáním podávají nadprůměrné výkony při řešení úloh matematického charakteru nebo mají potenciál k podávání takovýchto výkonů. Vzhledem k tomu, že matematika je věda velmi abstraktní, je pro dosažení excelentních výkonů v matematice nezbytné rozvíjet u žáků schopnost abstraktně myslet a schopnost využívat jazyk jako nástroj myšlení. Stat' přináší implicitní a explicitní pohled na pojem *matematické nadání*. Vybízí k odkrytí naší vlastní osobní implicitní teorie matematického nadání. V explicitním přístupu vybízí k zamyšlení, jaké schopnosti, jaké dílčí inteligence (dle klasifikace Gardnera, 1999) jsou nadprůměrně rozvinuty u matematicky nadaných jedinců. Vybrané myšlenky Vygotského jsou dány do souvislosti se vzděláváním matematicky nadaných. Jsou zmíněny také specifické skupiny žáků s matematickým nadáním.

**Abstract:** Mathematical talent is a specific intellectual talent. Mathematically gifted perform above-average when solving mathematical tasks or have potential for such performance. Mathematics is a very abstract science therefore is necessary to develop the pupils' ability to think abstractly and the ability to use language as a tool of thinking to achieve excellent performance in mathematics. The article brings an implicit and an explicit look at the concept of mathematical talent. It calls for uncovering our own personal implicit theory of mathematical talent. The explicit approach encourages a reflection, what abilities of mathematically gifted and what partial intelligence (according to Gardner's classification, 1999) are exceptionally developed. Selected Vygotsky's ideas are put into the context of mathematically gifted education. There are also mentioned specific groups of pupils with mathematical talent.

**Úvod**

Spolu s rostoucím zájmem o problematiku vzdělávání nadaných v naší zemi roste zájem o informace o specifických skupinách intelektově nadaných žáků, o druzích nadání. Matematické nadání diagnostikují psychologové z pedagogicko-psychologických poraden u žáků, kteří podávají výjimečné výkony pouze v matematice, ale i u žáků, kteří vynikají nad vrstevníky kromě matematiky také v celé řadě dalších školních předmětů.

Odpovězme si nejprve na otázku: Co je matematika? „*Matematika je věda o kvantitativních stavech a vztazích a o prostorových formách objektivního světa,*“ pracuje s abstraktními prostředky, pomocí kterých formuluje obecné zákonitosti našeho světa

(Melichar, 2003). Mezi základní matematické pojmy patří abstraktní pojem *číslo*. S čísly se setkáváme každý den v běžném životě, ale odpovědět správně na otázku „Co je číslo?“ dokáže málokdo. Matematické objekty a vztahy mezi nimi jsou často velmi abstraktní, rozvinutá schopnost abstraktního myšlení je jedním z předpokladů pro excelentní výkony v matematice.

Jedince s matematickým nadáním chápeme jako specifickou skupinu rozumově nadaných, kteří mají nadprůměrně rozvinuté matematické schopnosti. Jak uvádí Melichar (2003): „*Matematické schopnosti lze chápat jako specifickou složku obecné inteligence. Tvoří je několik základních dílčích kompetencí: schopnost chápat čísla, paměť pro čísla, matematické dovednosti a matematické uvažování.*“

Matematické nadání je specifické rozumové (intelektové, kognitivní) nadání. Pro rozumové nadání je klíčovým pojmem inteligence. Teorie inteligence v přehledové studii roztrídila Plháková (1999) na explicitní a implicitní teorie.

**Implicitní teorie** jsou soubory našich představ a subjektivních názorů, které si bezděčně vytváříme o objektivní realitě okolo nás, ale zejména o lidech, o jejich vlastnostech, o vztazích mezi lidmi. Také u nadaných jedinců podle jejich projevů chování a podle výkonů, které se opakují, usuzujeme na jejich schopnosti. A na základě toho pak provádíme třídění, kategorizaci. Některé projevy chápeme jako typické pro určitou skupinu lidí. Mezi matematicky nadané zařazujeme jedince, který vykazuje charakteristiky, jež přisuzujeme lidem s matematickým nadáním. Tento proces třídění, zařazování do tříd, kategorií, je v obecné rovině přirozenou součástí našeho každodenního života, probíhá více či méně nevědomě, pomáhá nám orientovat se v záplavě informací. K uvědomění si naší vlastní implicitní teorie matematického nadání lze využít myšlenkový experiment, který uvádí Havigerová (2011, s. 9) k zjištění osobního *prototypu nadání*. Ze zmíněného experimentu uvádíme třetí úkol aplikovaný na matematické nadání:

*Úkol: Papír rozdělte na tři části. Do prvního sloupce запиšte pod sebe prvních deset lidí, kteří vám vytanou na mysli, když se řekne **člověk s matematickým nadáním**. Do druhého sloupce запиšte deset lidí, které byste rozhodně jako matematicky nadané neoznačili. Nad každou dvojicí osob uvedených v řádku se zamyslete, čím se liší. Své myšlenky poctivě, bez korektur zaznamenejte do třetího sloupce.*

**Explicitní teorie** usilují o popis mentálních struktur a procesů, které mají vliv na intelektový výkon. Zde existují dva výrazné názorové proudy. Jeden z nich se kloní k pojetí inteligence jako komplexní schopnosti. Je ovlivněný výzkumem Spearmana, ve kterém využil metodu faktorové analýzy a následně pak formuloval teorii, podle níž se inteligence skládá z obecného g-faktoru a specifických s-faktorů. Druhý názorový proud inteligenci chápe jako množinu dílčích, samostatných inteligencí. Výraznou teorií tohoto směru je teorie rozmanitých inteligencí Gardnera (1999). K matematickému nadání se z těchto dílčích inteligencí váže *logicko-matematická inteligence*, v matematice

se však výrazně uplatňuje také *prostorová inteligence*. V kontextu matematických úloh, které žák řeší, se projevují i další složky inteligence, a také osobnostní charakteristiky žáků, jejich angažovanost v úkolu.

## Matematické myšlení a jazyk

Složkami matematického myšlení nejsou jen symboly a vizuální představy. V celé řadě matematických problémů je třeba pracovat s jazykovými prostředky. Matematické nadání je ovlivněno také *jazykovou inteligencí*. Jak uvádí Melichar (2003): „*Myšlení a jazyk jsou vzájemně spjaté jevy, kdy myšlení jako nejvyšší forma odrazu skutečnosti se vyjadřuje a realizuje pomocí jazyka. Myšlení je spojeno s jazykem, fyziologicky je myšlení i jazyk podmíněno druhou signální soustavou a slouží poznávání světa a komunikaci mezi lidmi. Jazyk je způsobem existence myšlení, jeho fyzickým nositelem.*“

V našem kvalitativně zaměřeném výzkumu, který se týká edukační nabídky pro žáky s mimořádným matematickým nadáním v primárním vzdělávání, jsme při pozorování matematicky nadaných žáků při samostatném řešení matematických úloh pozorovali v souvislosti s využíváním jazyka některé výrazné rozdíly. Jako příklad uvádíme srovnání přístupů dvou žáků k řešení dvou konkrétních úloh, první žák pracoval rychle, intuitivně, druhý žák své myšlenky formuloval ve větách:

*Ve dvou úlohách dominovalo užití logicko-matematické a prostorové inteligence, nebyly to úlohy, kde by slovní zadání hrálo klíčovou roli. V jedné z úloh byl akcentován vztah mezi čísly a proměnnými, v druhé úloze pak rozmístění krychlí v prostoru a grafický záznam této krychlové stavby na tři průmětny. První z žáků ignoroval a přeskočil slovní písemné instrukce v úvodu úlohy a s využitím intuice úlohu správně vyřešil, u druhé úlohy jen zběžně pročetl text a věnoval pozornost obrázkům a experimentování s krychlemi. Po vyřešení dílčích kroků prováděl rychlou kontrolu, po dokončení úloh o ně ztratil zájem, celkovou kontrolu neprováděl. Druhý žák naopak četl slovní instrukce několikrát a důkladně. V průběhu práce k sobě šeptem hovořil (spisovně a gramaticky správně), kladl si otázky, zdůvodňoval jednotlivé kroky a, což pro nás u žáka 4. třídy základní školy bylo překvapivé, slovně zdůvodňoval i kroky, které vyloučil. Postupoval systematicky a velmi pečlivě, byl hluboce ponořen do svých myšlenek, nevnímal okolní dění ve třídě, kde probíhala běžná výuka. Po vyřešení úlohy si znovu pročetl zadání a soustředěně provedl důkladnou kontrolu dílčích úloh, pečlivě zkontroloval i jednotlivé komponenty krychlové stavby. Vše si pro sebe slovně komentoval. Po dokončení úlohy se pro sebe usmál a s jistotou si řekl: „Mám to správně.“*

## Charakteristiky matematicky nadaných

Pro jedince s matematickým nadáním jsou typické „obecné“ charakteristiky rozumově nadaných a spolu s nimi také charakteristiky specifické, které se váží k matematice.

Kognitivní charakteristiky intelektově nadaných uvádíme souhrnně podle Hříbkové (2007): Nadaní jsou samostatní při získávání informací, zajímají se o vztahy příčiny a následku, správně a rychle zobecňují, mají rozvinuté kritické myšlení, bohatý slovník, udrží déle pozornost; projevují intelektuální hravost a zvědavost, jsou schopni přijímat nové informace a vyžadují je, dovedou být nekonvenční v uvažování; mají vynikající paměť, jsou dobří pozorovatelé, pamatují si i drobné detaily, pozornost však věnují především tomu, co je zaujalo.

Žák s matematickým nadáním – tento pojem zahrnuje žáky s různými druhy matematického nadání, typické projevy se mohou u konkrétních jedinců výrazně lišit. Stručná sumarizace charakteristik žáků s matematickým nadáním, podle různých autorů (In Makrides, 2006):

- Neobvykle velký zájem o matematiku, zvědavost,
- neobvykle bystré reakce, rychlé porozumění a aplikace matematických myšlenek,
- nadprůměrná schopnost abstraktně myslet a pracovat a schopnost uvědomovat si matematické vztahy a souvislosti,
- nadprůměrná schopnost přemýšlet o matematických úlohách a pracovat s nimi flexibilně a tvořivě, nikoli stereotypně,
- nadprůměrná schopnost přenášet poznatky do nových, neprobádaných matematických situací.

Pro rozumově nadané děti je charakteristické, že jsou schopny abstrakce výrazně dříve než jejich vrstevníci, dříve reálnou manipulaci nahrazují mentální manipulací s objekty. Také postupují rychleji na cestě od přímé zkušenosti s předměty k abstrakci, k odhalování matematických vztahů a zákonitostí (Makrides, 2006). Akceleraci kognitivního vývoje u intelektově nadaných zmiňuje také Hříbková (2009) a uvádí, že nadané děti používají vyspělejší strategie řešení, které běžně používají až starší, průměrně intelektově nadané děti.

S intelektově nadanými, kteří mají potenciál k nadprůměrným výkonům, ale mimořádné výkony dosud nepodávají, se setkáváme zejména u dětí předškolních a dětí mladšího školního věku. Hovoříme o tzv. latentním nadání. S nadanými, kteří již podávají nadprůměrné výkony a manifestují mimořádné nadání, se setkáváme spíše až na druhém stupni základní školy, u dětí staršího školního věku. (Hříbková, 2010) U předškolních dětí a dětí mladšího školního věku, které opakovaně podávají dílčí nadprůměrné výkony, psychologové z pedagogicko-psychologických poraden upřednostňují ve svých zprávách termín *akcelerovaný vývoj* před pojmem *nadání*. Zprávu o matematickém nadání u takto starých dětí vydávají ve výjimečných případech, kdy jsou matematické schopnosti a

výkony dětí mimořádné. V cizojazyčné literatuře se v souvislosti s žákem, který začíná podávat výrazně nadprůměrné výkony v matematice, setkáváme s označením *mathematically promising* (žák nadějný v matematice).

### Vztah učení a psychického vývoje

Kognitivní vývoj dětí se týká změn a utváření psychických funkcí. Zahrnuje kvantitativní změny, přibývání znalostí, a také změn kvalitativních, jež se týkají způsobů myšlení. Školní edukace se opírá o poznatky kognitivní psychologie o poznávacích procesech, za jejichž podstatu je považována mentální reprezentace jako schopnost kódovat a strukturálně modelovat a uchovávat jednotlivé procesy, stavy a jevy vnitřního či vnějšího světa a operovat jimi (Kohoutek, 2008). Zásadní vliv na kognitivní psychologii měla výzkumná činnost Piageta, který za základní princip vývoje považoval prolínání dvou procesů interakce (přizpůsobování) mezi člověkem a prostředím – akomodace a asimilace. Piaget (1999) podrobně popisuje cestu poznávání, jak během svého vývoje člověk pracuje s informacemi. Problematickou poznávacího procesu v matematice se podrobně zabývá Hejný a Kuřina (2001).

V Piagetově teorii je popsán také vývoj matematických schopností. V raném vývojovém období jedince se logicko-matematické inteligence rozvíjí v přímé konfrontaci se světem materiálních objektů, kdy se dítě dotýká předmětů a manipuluje s nimi, na rozdíl např. od verbálních nebo hudebních schopností, které se rozvíjejí v audio-orální sféře. Člověk se dostává od objektů k výrokům, od činností ke vztahům mezi nimi, přechází od konkrétních operací k formálnímu myšlení (Piaget, 2000; Gardner, 1999). Z toho vyplývá pro matematické vzdělávání dětí mladšího školního věku požadavek na zařazování přímé manipulace s předměty v souladu s kognitivní zralostí dítěte.

Piaget chápal mentální vývoj jako předpoklad k učení, akcentoval proces zrání oproti procesu učení; podle Vygotského naopak dobré učení předbíhá vývoj, činnosti dítěte a interakce s dospělými provázené učením napomáhají zrání rozumových schopností (Vygotskij, Průcha, 2004). Klíčovým pojmem Vygotského teorie je *zóna nejbližšího vývoje*, kterou definuje jako rozdíl mezi dvěma vývojovými úrovněmi dítěte, aktuální a potenciální. Současnou úroveň definuje jako schopnost samostatného řešení problému, potenciální úroveň jako schopnost řešit problém pod vedením zkušenější osoby (Průcha, 2009).

Vygotského koncepce zóny nejbližšího vývoje má i praktické důsledky pro vzdělávání nadaných, vyplývá z ní požadavek předkládat matematicky nadaným „vhodné kognitivní výzvy“ (Koshy et al., 2009) a také, vzhledem k akceleraci kognitivního vývoje nadaných a individuálním odlišnostem žáků, požadavek na individualizaci a diferenciaci vyučovacího procesu.

Vědomí člověka neobsahuje nezprostředkované údaje. Vygotského zákon mediací (zprostředkování) potvrzuje význam učitele - druhé osoby, která vede nebo podporuje činnost dítěte s „nástroji“ (prvky, jež zprostředkovávají dítěti působení na předměty a osoby okolního světa). Při učení ve škole jde zejména o kulturní nástroje, jako jsou *abstraktní pojmy*. (Vygotskij, 1976; Průcha, 2009)

Obrátíme-li pozornost k vyučování matematice, pak Vygotského teorie vybízí k zamyšlení, jak vyvážit samostatnou práci žáka a podporu učitele při řešení problémů v matematice. Podrobně se tomuto tématu věnuje Polya (1945), kde klíčovou roli zastává učitel, který vybírá vhodné úlohy a poskytuje žákovi přiměřenou podporu tak, aby žák využil svůj potenciál, získal co nejvíce zkušeností z nezávislé samostatné práce a rozvíjel tak své nadání.

### **Žáci s matematickým nadáním ve výzkumech našich a zahraničních autorů**

Dle zjištění Laznibatové (2007), podávanými výkony tvoří matematicky nadané děti zcela samostatnou skupinu ve srovnání s běžnou populací; jsou pro ně charakteristické vysoce rozvinuté všeobecné intelektové schopnosti, s rozvinutou verbální i neverbální složkou inteligence, a také verbální a neverbální tvořivosti. Laznibatová také zjistila, že mimořádné matematické schopnosti nejsou závislé na pohlaví.

Celá řada autorů zmiňuje vysokou korelaci mezi výkony v inteligenčních a matematických testech, tzn., že existuje významný vztah mezi všeobecnými a matematickými schopnostmi (Laznibatová, 2007). Žáci s matematickým nadáním projevují vyspělou schopnost zdůvodňovat, zvědavost a komplexnost myšlení; je pro ně typické, že chápou velmi rychle a dobře si pamatují, takže opakování a procvičování je často zbytečné nebo je pro ně dokonce frustrující (Deal a Wismer, 2010).

Žáci s matematickým nadáním mladšího školního věku pracují při řešení úloh rychleji než ostatní vrstevníci, lépe verbalizují svá zjištění, kvalitativně lépe odpovídají a vysvětlují, signifikantně více používají „makro strategie“. Heinze (2005) dále zdůrazňuje potřebu věnovat pozornost individuálním schopnostem těchto dětí a poskytovat jim individuální podporu.

### **Specifické skupiny žáků s matematickým nadáním**

Populace nadaných je rozmanitá, velké individuální rozdíly existují i mezi žáky s matematickým nadáním a i ty lze třídit podle různých hledisek nebo mezi nimi nalézt specifické skupiny. Různé skupiny nadaných se mohou potýkat s odlišnými problémy.

---

Dítě s mimořádným nadáním a současně s handicapem bývá někdy označování



jako dítě s dvojitou výjimečností (twice exceptional). Po vlně zájmu o tyto žáky v zahraničí, pozornost zvláštnostem vzdělávání této specifické skupiny žákovské populace věnovala ve svém výzkumu Portešová (2011). Problematické děti s poruchami učení v matematice se u nás dlouhodobě věnuje Blažková, věnovala se i problematice dětí s poruchou učení a s matematickým nadáním (Blažková, Vaňurová, 2010).

Mezi rizikové skupiny, které vyžadují zvláštní péči, podle Hříbkové (2007) patří také rozumově nadané dívky, zvláště pokud projevují nadání v „mužských“ oblastech, jako je např. matematika.

## **Závěr**

Jestliže se žáci výrazně odlišují svými schopnostmi (a výkony) od svých vrstevníků, pak mají také odlišné potřeby. Tvorba diferencovaného kurikula pro nadané žáky zahrnuje zejména modifikaci obsahu a modifikaci procesu (Jurášková, 2006). Informace o matematickém nadání jsou užitečné pro rodiče dětí s matematickým nadáním, napomáhají jim porozumět lépe dětem a jejich projevům. Základní znalosti učitele o matematickém nadání jsou předpokladem pro tvorbu kvalitní vzdělávací nabídky pro žáka s matematickým nadáním.

## **Literatura:**

Blažková, R., Vaňurová, M. (2010) Charakteristika nadaného žáka s poruchou učení z hlediska matematických úloh. In: *Matematické vzdělávání v kontextu proměn primární školy*. Olomouc: Univerzita Palackého, s. 57-61.

Deal, L. J., Wismer, M., G. (2010) NTCM Principles and standards for mathematically talented students. *Gifted child today magazine*. 2010, roč. 33 (č. 3), s. 55-66.

Gardner, H. (1999) *Dimenze myšlení*. Praha: Portál.

Havigerová, J. M. (2011) *Pět pohledů na nadání*. Praha: Grada.

Heinze, A. (2005) Differences in problem solving strategies of mathematically gifted and non-gifted elementary students. *International education journal IEJ* [online], roč. 6, č. 2, s. 175-183.

Hejný, M., Kuřina, F. (2001) *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování*. Praha: Portál.

Jurášková, J. (2006) *Základy pedagogiky nadaných*. Praha: IPPP ČR.

Hříbková, L. (2007) *Základní témata problematiky nadaných*. Praha: Univerzita Jana Amose Komenského Praha.

Hříbková, L. (2009) *Nadání a nadaní: pedagogicko-psychologické přístupy, modely, výzkumy a jejich vztah ke školské praxi*. Praha: Grada.

Hříbková, L. (2010) *Mimořádně nadané děti ve škole a v rodině*. Ústí nad Labem: UJEP.

Kohoutek, R. (2008) Kognitivní vývoj dětí a školní vzdělávání. *Pedagogická orientace* [online]. Praha: Česká pedagogická společnost. č. 3, s. 3-22.

Koshy, V., Ernest, P., Casey, R. (2009) Mathematically gifted and talented learners: theory and practice. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* [online]. 2009-03-15, roč. 40, č. 2, s. 213-228.

Laznibatová, J. (2007) *Nadané dieťa: jeho vývin, vzdelávanie a podporovanie*. Bratislava: Iris.

Makrides, G. (2006) *Objevování, motivace a podpora matematických talentů na evropských školách: Projekt MATHEU*. Praha.

Melichar, J., Svoboda, J. (2003) *Rozvoj matematického myšlení I*. Ústí nad Labem: UJEP.

Plháková, A. (1999) *Přístupy ke studiu inteligence*. Olomouc: Univerzita Palackého.

Piaget, J. (1999) *Psychologie inteligence*. Praha: Portál.

Piaget, J., Inhelder, B. (2000) *Psychologie dítěte*. Praha: Portál.

Pólya, G. (2009) *How to solve it: a new aspect of mathematical method*. Bronx, NY: Ishi Press International.

Portešová, Š. (2011): *Rozumově nadané děti s dyslexií*. Praha: Portál.

Průcha, J. (2009) *Pedagogická encyklopedie*. Praha: Portál.

Vygotskij, L. S. (1976) *Vývoj vyšších psychických funkcí*. Praha: SPN.

Vygotskij, L. S., Průcha, J. (2004) *Psychologie myšlení a řeči*. Praha: Portál, s. 71-108.

\*\*\*

### **Mgr. Dagmar Malinová**

Pracuje jako odborná asistentka na katedře matematiky a ICT Pedagogické fakulty v Ústí nad Labem. Její doktorské studium na Pedagogické fakultě Univerzity Palackého v



Olomouci je zaměřeno na problematiku vzdělávání dětí s matematickým nadáním. S talenty se setkávala během svého patnáctiletého působení na středních a základních školách, kde učila matematiku a fyziku. Je také matkou nadaného dítěte.